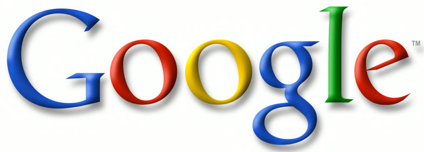
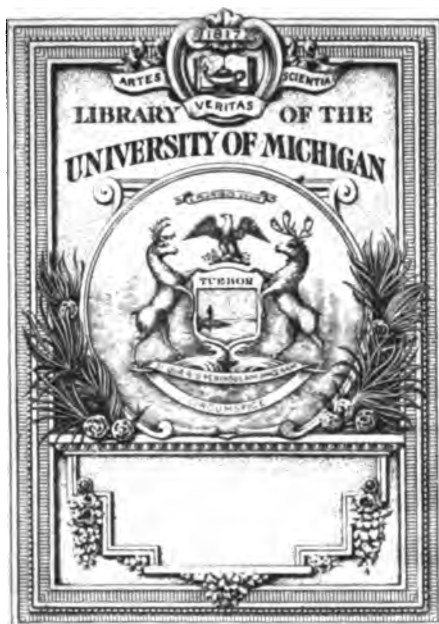

Google


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

437

LUDORUM SCIENTIA

PUBLICO BENEFICIO ILLUSTRATA.

OPUS

JOHANNIS RIZZETTI

EMINENTISSIMO PRINCIPI SANCTÆ ROMANÆ ECCLESIÆ CARDINALI DE POLIGNAC &c.

DICATUM.



VENETIIS, MDCCXXV.

Apud ALOYSIUM PAVINUM.

SUPERIORUM PERMISSU.

Eminentissime Princeps.



Um in Ludorum Scientiam fortè incidissem, in hac me jucundè detinuerunt Ughenius, Bernoullius atque Montmortius; At quia tamen præstantissimorum Virorum cogitationes in id tantùm incumbunt, ut quadam determinatione sanciatur, quantò quis sit ad lucrum potiùs quàm jacturam proclivior, ulteriùs putavi ferendas esse speculationes; Quare totus in eo fui, ut, si quid certi afferri possit in rebus tam abditis & obscuris, perciperem. Hinc plura didici, quæ non minus pulchritudinis quam utilitatis specie placebant; neque enim minus pulchrum videbatur, quod incertum est, sub data lege coercere, quàm utile, quis futurus sit in hujusmodi rebus eventus, certissimo Effato pronunciare; Quamobrem ea, quæ inveni, publicè litteris trado, ac tibi

Emi-

Eminentiſſime Princeps offero, dedicoque. Si quis enim meis Doctrinis Patrocinii Splendor quærendus erat, non aliundè magisquam expectandus ex Te, cujus magnitudo totos Europæ fines ac ultra longè latèque peragravit, adeo ut ſummos Viros non ſolùm Excellentia Dignitatis adæquare, ſed fama nominis etiam antecellere videaris: Si Princeps quærebatur Scientiarum Amantiſſimus & Doctiſſimus, quis Te potior, cujus ſtudia ſummo ſemper honore habita ſunt à toto Litterarum Orbe, ut mirum ſit quomodo Arcana Scientiarum cum Politica Facultate conjungas, & non minori Majeſtate in Conventu Principum, quàm in Accademia Sapientum ſedeas? Hoc igitur opus illa accipe humanitate, qua aliàs erga mea Scripta vel Optica, vel Dinamica uſus fuiſti, & nunc quoque ſine, ut paulisper à rebus graviſſimis ad Mathematicarum delicias animus revocetur. Ludicra quidem hæc eſt, nam de ludis agitur, sed aliquid forſan invenies, quod animo tuo dignum cenſeas.

Venetiis pridie Kalendas Octobris.

Humiliſſimus, Addictiſſimus, & Obſequentiſſimus Servus
Johannes Rizzetti.

ARGUMENTUM.

DEmonstratur in prima parte Fortunam in ludis jus non habere, quemadmodum à vulgo censetur; nam in illis, qui omnino fortuiti putantur, si Aleatores pari conditione colludunt, diù ludendo nil possunt inde sperare; ac si quis alterum Prærogativa antecellit, diuturno ludendi exercitio certus est ille lucri, & iste damni: In illis autem qui fortuiti dicuntur ex parte, industria quoque in iisdem locum habente, quamvis Aleatores pari conditione decertent, diù decertantes afficiuntur lucro vel damno, pro ut majori vel minori Sagacitate donantur. QUOD AUTEM CURIOSIUS EST, IN LUDIS FORTUITIS ARS CONJECTANDI EO PERDUCITUR, UT INDUBITATO CALCULO DETERMINETUR, QUID INFALLIBILITER ALEATORES LONGA LUDENDI OPERA ACQUIRERE VEL AMITTERE POSSINT. Et hæc omnia præcipuè exhibentur in Corollariis, quæ, ut faciliùs inveniantur, ab antecedenti Theoria litteris Majusculis distinguuntur.

In secunda Parte dirimitur Controversia cum Clariss. Daniele Bernoullio habita, in qua sublatis erroribus Methodus conjectandi perficitur, ut de singulis ludis in specie veram ac distinctam Ideam consequamur.

Desiderandum esset ut ista Ludorum Scientia omnibus nota foret; nam Publico præjudicio detecto tanta ludendi libido reprimeretur non sine Bonorum conservatione, & Scientiarum emolumento, quod Scopus præcipuus operis est.

Erro-

Errores typographici ita emendentur.

Pag. 11. *lin.* 26. 27 : sostituendo 26 *lege* 27 : 26

Pag. 12. *lin.* 1. Primarii *lege* Secundarii

Pag. 24. *lin. ult.* potissimum *lege* pessimum

Pag. 27. *lin.* 8. $\frac{a^n - b^n}{a^n}$ *lege* $\frac{\overline{a^n - b^n}}{a^n}$

Pag. 32. *lin.* 29. recto *lege* certo

Pag. 36. *lin.* 4. $\frac{n}{2}, + \frac{n}{8}$ *lege* $\frac{n}{2} + \frac{n}{3}$

LUDO-



LUDORUM SCIENTIA.

Pars Prima.

Uamvis omnia certis rationibus, & conſtanti viciſſitudinis lege in Mundo contingere quadam naturali anticipatione perciperent homines; non erat tamen hæc veritas manifeſto in lumine conſtituta, nec rigore Geometrico demonſtrata. Jacobus Bernoullius acerrimi ingenii vir eam demonſtrandam ſibi propoſuit, ac in fine libri de arte conjectandi demonſtrationem ſubnectit, cujus, (ut inquit) tum novitas, tum ſumma utilitas cum pari difficultate conjuncta pondus & pretium reliquis illius doctrinæ capitibus ſuperaddit. At ſuum inventum non potuit, ut par erat, excolere, nam adverſa diu valetudine afflictus, & tandem ipſa morte præreptus operam imperfectam reliquit. Spes erat inſignes alios ex ejus familia Mathematicos ad ea,

quæ cœperat Vir summus conficienda, aggressuros, sed expectationem hucusque fefellit eventus, nec quicquam profuere, quæ in præfatione memorati libri leguntur, excitamenta.

Plura ex Bernoulliano Canone utilissima documenta ad omnes artes disciplinasque pertinentia fluere non ignorabam; at hujuscemodi speculationes sequi ingeniis excellentioribus relinquebam. In promptu erat simplex & perfecta Theoria de ludis fortuitis, quæ licet ex alienis principiis videbatur deprompta, eam tamen in publicum mittere cogitabam, nisi Clar. Daniel Bernoullius laudati Auctoris ex fratre nepos in hanc materiam cogitationes suas contulisset, suorum laborum fructus ipse quoque aliquando editurus. Cum ille de ludis ageret, non dubitabam quin totus in eo esset, ut molem extrueret, cujus Patruus fundamenta jecerat. Verùm eximium Juvenem in suis exercitationibus Mathematicis per obliquos incertosque Calles vagari observavi; quare operam mihi navandam constitui, ut nisi superbum ædificium, securum saltem perfugium construerem, quo me possem ab Adversarii dicteriis tueri, & alios ab injuriis fortunæ vindicare. In hoc igitur præcipuè conabor, ut propositiones elementares ad ludum Aleæ pertinentes tradam, laudem illi relinquens se implicandi in serierum ambagibus, quas tamquam arcanas edit, ac si ab ejus Patruo, & Mathematicis Anglis harum Provincia ita occupata non sit, ut parùm addendum sibi supersit.

Ne devius à proposito abeam, vestigia Jacobi Bernoullii sequar: Ut suum Dogma facilè intelli-

telligendum exhiberet, ſupponit in Urna quadam ſe inſcio reconditos eſſe plures calculos, alios albos & alios nigros, rationem, exempli gratia, ſeſquialteram inter ſe habentes, ac ſingulos æquè facilè extrahendos; deinde eorum proportionem experimentis exploraturus educit calculum unum poſt alium (ſingulis vicibus reponendo illum quem eduxit, priùs quam ſequentem eligat, & omnes ſimul permiſcendo) ac obſervare ſibi proponit, quoties albus; & quoties ater exeat. His poſitis quærit, utrum hoc toties fieri poſſit, ut decuplò, centuplò, millecuplò &c. probabilius fiat (hoc eſt ut moraliter tandem certum evadat) numeros vicium, quibus albus, & quibus niger elicitur eamdem rationem ſeſquialteram, quam ipſi calculorum, ſeu caſuum numeri gaudent, inter ſe habituros, potius quam aliam ab iſta diverſam.

Ne autem hæc ſecus intelligantur, quam oportet, rationem inter numeros caſuum, quam experimentis determinare aggreditur, non præcisè & in indiviſibili acceptam vult (ſic enim, inquit, eò minus probabile fieret veram eſſe rationem inventam, quò plures caperentur obſervationes), ſed eam rationem vult in aliqua latitudine ſumptam, id eſt binis limitibus concluſam, qui tamen conſtitui poſſunt tam arcti, quam quis voluerit.

Hoc utique magnum videtur inventum, proportionem enim, quam inter ſe caſus poſſibiles ſervant, à poſteriori exploratam habemus, ac ſi nobis à priori cognita foret. Quomodo autem fieri poſſet ut quò plures capiuntur obſervationes, eò minus probabile ſit veram eſſe rationem

inventam; & iterum quò plures capiuntur observationes, eò magis probabile sit rationem inveniri binis limitibus conclusam, qui tam arcti constitui possint, quam quis voluerit, aliis explicandum relinquo; Et interim quomodo rem ego concipio, sequentibus expono.

Defin. 1.

Casus qui contingentes sunt, pari vel impari possunt facilitate contingere. Quoniam autem de ludis agendum est, qui casibus instituuntur æquali proclivitate donatis, nomine casuum intelligendi sunt illi, quorum eventus sunt æquè proclives.

Defin. 2.

Adæquationem voco more Diophanteo eam æqualitatis speciem, in qua duæ quantitates ita se invicem superant, ut differentia ad alterutram ipsarum comparata evadat inassignabilis.

Axioma 1.

Effectus constans & immutabilis pendet à causa constante & immutabili.

Theorema Primum.

CAlculorum omnium ut ante in urna collocatorum duos designo litteris A, B, ac plures modo allato eductiones peragendo dico rationem, quam habituri sunt inter se calculi educti A, B ad æqualitatem magis ac magis accedere, & tandem intra limites adæquationis consistere.

Hoc omnes in quotidiana praxi constanter observant, & (ut verbis Bernoullianis utar) neminem latet, quod ut judicium de quopiam eventu feratur, non sufficit unum, vel alterum experi-

perimentum, sed opus est magna experimentorum copia: Quando & stupidissimus quisque (nescio quo naturæ instinctu) per se & nulla prævia institutione compertum habet, quò plures ejusmodi captæ fuerint observationes, eo minus à scopo aberrandi periculum fore. Quamvis hoc autem naturaliter omnibus notum sit, attamen demonstrationem addo, quæ si deficiente Lemmatum apparatu tam acris non fuerit quam Bernoulliana, nec ulla quoque explicatione indigebit, se namque satis simplicitate probabit.

Quotidie perago datum numerum extractionum calculorum A, B (exempli gratia) millenarium, & observo quoties exeat unus, & quoties alter: His positis dico primò, quod quibusdam diebus (ut casus fert) extrahetur calculus A sæpiùs quam B, & aliis eligetur calculus B sæpiùs quàm A. Nam si quotidie semper unus (puta) calculus A sæpiùs quam alter educeretur, *casus* locum non inveniret, & huic effectui constanti causa æquè constans tribuenda foret, major nempè facilitas educendi calculum A, quod repugnat Hypothesi.

Cum igitur sæpius extrahendus sit calculus unus quibusdam diebus, & alter aliis, in duas summas quotidie colligo, quoties eductus sit toto tempore extractionum calculus A, & quoties B: Quibus positis dico secundò, quod prima summa superabit aliquando secundam, & aliquando à secunda superabitur. Nam si quotidie summa eductionum unius (puta) calculi A superaret summam eductionum alterius, huic effectui immutabili causa pariter immutabilis responderet,

quæ

quæ nulla alia esse posset, nisi quia calculus A extrahendus esset faciliùs quam B, quod Hypothesi rursus repugnat.

Cum itaque summa eductionum calculi A futura sit quibusdam diebus major, & quibusdam minor altera summa eductionum calculi B, aliquando eveniet, ut prima summa superet hodie secundam, & cras à secunda superetur. Eveniet itaque ut differentia inter universas eductiones calculi A, & illas calculi B consistat ad summum in dato numero millenario (dempta unitate) illarum eductionum, quæ unica die peraguntur.

Cum hoc semel contigerit, repetito discursu demonstratur futurum fore, ut quotidiano exercitio iterum atque iterum idem contingat. Si igitur continuatis eductionibus differentia, quæ futura est inter illas calculorum A & B rursus ac rursus consistere debet ad summum in dato numero millenario unitate subducta, quibusdam aderunt intervallis dies, quibus numero eductionum magis semper atque magis crescente differentia inter extractos calculos A & B (cum extractionibus unius vel alterius comparata) erit minor semper atque minor, & in hoc casu ratio inter eductos calculos A & B magis semper atque magis ad æqualitatem accedet. At numerus extractionum augeri potest in infinitum; Si hoc igitur fiat, differentia inter extractos calculos A & B (facta cum extractionibus unius vel alterius comparatione) erit infinitè parva; & in hoc casu eductiones calculorum A & B inter se adæquabuntur; Quod erat demonstrandum.

Scol. 1.

Qui vim hujus demonstrationis perceperit, eam rectè

rectè concludere intelliget, dum agitur de proportione Geometrica, inter se comparando eductiones, quæ calculorum diversi generis fiunt; non autem rectè, dum agitur de proportione Aritmetica, inter se comparando excessus, quibus eductiones calculorum generis unius superantur ab eductionibus calculorum generis alterius. Porrò eductionum numero magis semper atque magis crescente, hujusmodi excessus, si comparantur inter se, possunt esse aliquando minores, & aliquando majores; Sed tamen intra quosdam limites sunt; etenim quotidiano exercitio continuato adsunt aliqui quibusdam intervallis dies, quibus nequeunt excessus illi superare numerum millenarium unitate subducta, & ideo comparati cum eductionibus calculi unius vel alterius magis semper atque magis decrescunt, & tandem penitus evanescunt. Hinc igitur fieri potest, ut discrimen, quo proportio inter eductos calculos differt ab æqualitate, majus sit exacto toto anno, quam primo mense, sed tamen fit, ut illa proportio magis ad æqualitatem post totum annum quam post primum mensem accedat.

Corol. 1.

Quod demonstratum fuit de geminis calculis A, B, idem aptari potest omnibus aliis albis & nigris, ut ante, in urnam immissis: Quare eductionibus sæpiùs repetitis agnoscitur, quod ratio, quam habituri sunt inter se calculi educti magis semper atque magis accedet, & tandem illam rationem adæquabit, qua calculi educendi gaudent.

Corol. 2.

Iterum facilè intelligitur, quod longa eductionum

num opera decuplò, centuplò, millecuplò &c. probabilius fit, & tandem moraliter certum evadit, numeros vicium, quibus albus, & quibus niger elicitur, rationem inter se habituros, quantumvis proximam illi, qua calculi educendi donantur, ut Jacobus Bernoullius demonstrare sibi proposuit.

Corol. 3.

Cum in quotidianis eductionibus calculorum A, B aliquando eveniat, ut summa illarum calculi A hodie superet summam aliarum calculi B, & cras prima summa à secunda superetur, eveniet quoque ut ipsæ summæ in aliqua eductione æquentur inter se: Et cum hoc semel contigerit, si quotidianum exercitium continuatur, eveniet quoque, ut iterum atque iterum idem contingat. At quod demonstratur de geminis calculis A, B, idem aptatur ad reliquos alios albos & nigros in urna, ut ante, collocatos; itaque ratio qua calculi educti donantur, non modo accedet, sed quoque rationem æquabit, quam calculi servant educendi; & cum hoc semel acciderit, iterum idem continget, toties quoties &c.

Ad ludorum Theoriam has notitias consultò præmisi, quia mirum in modum inserviunt illorum materiæ illustrandæ; ut autem reliqua rectè procedant, quædam aliæ definitiones superaddendæ sunt.

Defin. 3.

Inter Casus ad Aleam pertinentes quidam sunt, quorum aliquo eveniente alter Aleatorum ab altero depositum adipiscitur: Alii quorum eventu Aleatores nihil amittunt ex proprio, & nihil acquirunt ex alieno. Sic in ludo Pharaonis, si Charta dignitatis electæ, quæ significativa appel-

latur,

latur ; locum tenet in aliqua foliorum biga primum vel ſecundum , in commodum unius vel alterius Aleatoris cedit ; Si verò ipſa Charta eſt omnium ultima, nil inde ſequitur pro aleatorum lucro vel damno. Primi Caſus, quibus ludus ſuum ſortitur effectum, deciſivi vocantur : Si verum aliquis poſtremorum accidit, poſſunt Aleatores detineri, ut ludum uſque ad deciſionem proſequantur, & dimitti poſſunt, ut à ludo inſtaurando abſolvantur. Si Aleatores detinentur, hujuſmodi Caſus nihil agunt, ut ludus aliquo modo alteretur ; ſi dimittuntur, hi caſus in incerto relinquunt, an ſuum ludus effectum ſortiturus ſit. Quoniam igitur illi (aſſentiente quoque Bernoullio Patruo) diſſimulandi ſunt, & iſti (jubente quoque Bernoullio Nepote) calculo ſubjiciendi, illos itaque inanes, iſtos indifferentes appello.

Defin. 4.

Vocetur *m* numerus ludorum, in quibus Caſus, qui contingunt, inter ſe ſunt, ſicut illi qui contingere poſſunt.

Defin. 5.

Juſtum appello ludum in quo ſerie ludorum *m* completá uterque aleatorum diſcedit abſque lucro vel damno.

Defin. 6.

Si quis verò aleatorum in ſerie ludorum *m* quicquam amittit ex proprio, dicitur ludum injuſtum eſſe, ſtante pro altero prærogativa.

Theorema Secundum.

GEminis inter ſe decertantibus, ſit depoſitum unius A, alterius B, caſus deciſivi pro pri-

mo x, pro ſecundo y, caſus indifferentes q: Dico juſtum fore ludum, ſi eſt $x : y :: A : B$, hoc eſt ſi caſus deciſivi, qui Aleatoribus favent, inter ſe ſunt, ut iſtorum depoſita.

Numero ludorum m completo, una pars erit illorum, qui ratione caſuum indifferentium vacui manebunt, altera pars erit eorum, qui caſuum deciſivorum opera ſuum ſortientur effectum: Hæc poſtrema pars exprimetur fractione $\frac{mx + my}{x + y + q}$, & ea quoque in alias duas dividetur, quarum una ad unum aleatorem pertinebit, altera ad alterum. Cum autem hæ geminæ partes inter ſe ſint ut $x : y$, invenietur prima $\frac{mx}{x + y + q}$, ſecunda $\frac{my}{x + y + q}$; & exactis ludis m lucrum primi aleatoris erit $\frac{mBx}{x + y + q}$, & lucrum ſecundi $\frac{mAy}{x + y + q}$. At juſtus eſt ludus ſi exactis ludis m nihil aleatores, unus ab altero, acquirunt; Itaque eſſe debet in hoc caſu $\frac{mBx - mAy}{x + y + q} = 0$, ex qua elicitur $x : y :: A : B$; quod erat demonſtrandum.

Corol. 1.

Interdum Caſus deciſivi, qui ſingulis aleatoribus favent poſſunt eſſe inter ſe diverſi, alii primarii, & alii ſecundarii. Hujuſmodi ſint Caſus x, qui ad primum aleatorem pertinent, ſcilicet horum aliqui primarii ſint, quorum numerus v, & alii ſecundarii, quorum numerus u: Hic aleator acquirat, ſi contingit unus ex illis, totum depoſitum alterius B, & ſi accidit unus ex iſtis, partem ipſius depoſiti expreſſam per a B. At æquitas poſtulat ut in omnibus ludis m nemo detrimentum capiat, ſi fit igitur debita ſubſtitutio, præmiſſa formula in ſequentem mu-

tatur

tatur $\frac{mBv + maBu - mAy}{v+u+y+q} = o$, & æquatione ad analogiam revocata deducitur $v + au : y :: A : B$.

Hujus generis est ludus Pharaonis: Pro primo aleatore, qui dicitur œconomus, numerantur aliqui casus primarii v, quum scilicet Charta significativa est unica & prima in aliqua foliorum biga, & aliqui secundarii u, quum scilicet ista Charta duplex est in una eademque Biga: Si apparet unica & prima, lucratur œconomus totum depositum B alterius aleatoris qui dicitur collusor: Si duplex illa est, dimidiam tantum accipit partem ipsius depositi B. Collusori favent quidam casus tantùm primarii y, quum nempè Charta significativa locum in biga tenet unicum, & secundum, quo casu eveniente totum acquirit depositum œconomi A. Cavendum est autem ne ipsa Charta appareat omnium postrema, hic enim Casus q pro indifferente haberetur. Ut igitur ludus hic ad æquitatem reducatur esse debet

$$\frac{mBv + \frac{mBu}{2} - mAy}{v+u+y+q} = o,$$ hoc est $v + \frac{1}{2}u : y :: A : B$;

quæ nos docet analogia casus secundarios æstimandos esse, ac si primarii forent debita proportione imminuti. Cum ludus instituatur integro foliorum Systemate, invenitur $v = y = 130000$, $u = 10725$, & $q = o$; justus igitur hic erit ludus, si fuerit $130000 + \frac{10725}{2} : 130000$ (vel quam proximè 27: sostituendo 26) :: A : B. Quare patet casus secundarios 10725 habendos esse ac si dimidii eorum primarii forent, & reliqui indifferentes.

Corol. 2.

Ita fit quum data parte depositi, quam aleator

 lucra-

lucraturus est in eventu casus primarii, depositum quæritur, quod pro ludi æquitate debetur in eventu primarii. At justus alio modo ludus fieri potest, quum dato nempè deposito, quod Aleator adepturus est in eventu casus primarii, quæritur ipsius depositi pars, quæ par est in eventu secundarii.

Rem illustrabit exemplum: In ludo Bassettæ Aleatores acquirunt ab invicem depositum A in eventu casus primarii: Hujusmodi casuum numerus pro œconomo est v, quum scilicet Charta significativa apparet anterior in qualibet alia foliorum biga præter primam; Casus enim, quibus ea potest esse anterior in prima biga, secundarii sunt, & hi quoque œconomo favorabiles, quorum numerus u: Numerus autem primariorum pro collusore est y, quum nempè ipsa Charta est posterior & unica in qualibet alia biga præter ultimam; Casus enim q quo potest esse omnium postrema, pro indifferente usurpatur.

Si quæratur quæ pars ipsius depositi A in æquo ludo ab œconomo acquirenda sit in eventu unius ex casibus secundariis, posita hac parte b A, formula superiùs proposita in sequentem transit $\frac{mAv+mbAu-mAy}{v+u+y+q}=0$, ex qua elicitur $b=\frac{y-v}{u}$. Cum igitur ludus incipiatur integro foliorum systemate, invenitur $y=130000$, $v=119900$, $u=20825$, & $q=0$; quare ludus hic ad æquitatem reducitur, si fit pars ejusdem depositi in casibus secundariis ab œconomo acquirendi (b) $=\frac{130000-119900}{20825}$, vel quam proximè $\frac{12}{25}$, quæ pars ipsius depositi minor est quam dimidia.

Corol. 3.

Æquitas ludi aliquando dependet non modo à quan-

quantitate depositi, quod Aleatores, unus ab altero, acquirere possunt, sed à numero experimentorum, quæ pro ludo complendo fieri debent. Sit numerus Casuum a, quorum pars una sit b, altera $a-b$. Ita ludus instituatur, ut Petrus depositum Pauli lucretur, si dato numero experimentorum n semper aliquis ex casibus b successivè contingit, & Paulus tantumdem acquirat, si aliquis accidit ex reliquis Casibus $a-b$. Ex calculo combinationum elicitur, quod eventus, qui in omnibus experimentis n contingere possunt favorabiles Petro, sunt $\frac{b^n}{a^n}$, & illi, qui possunt accidere favorabiles Paulo, sunt $\frac{a^n - b^n}{a^n}$. Ut igitur justus sit ludus, esse debet $\frac{b^n - a^n + b^n}{a^n} = 0$, ex qua elicitur numerus experimentorum $n = \frac{l2}{la - lb}$. Hujus problematis solutionem primus dedit Ughenius complectentem quosdam casus particulares, postea Jacobus Bernoullius generaliter ad omnes ampliavit; At quia calculo utitur longo, & operoso, non erit abs re hanc aliam solutionem compendiosissimam tamquam methodi specimen addidisse.

Corol. 4.

Cum ex præmissa formula $\frac{mBx - mAy}{x+y+q} = 0$, eliciatur analogia $x : y :: A : B$, quæ ludi æquitati convenit, Casus indifferentes q deprehendimus in hac circumstantia evanescere. Quamvis igitur isti decisivis addantur, omnia tamen, quæ supra posita sunt, eumdem effectum obtinent, ac si solis decisivis ludi constituerentur. Quod ita sit, patet etiam ex eo, quia Casus indifferentes suum

quidem

quidem locum habent in serie ludorum m. Verum cum lucra aleatorum in hac serie pro ludi æquitate inter se æquari debeant, sequitur Casus indifferentes nil aliud agere, quam in eventu se immiscere cum decisivis absque aleatorum lucro vel damno.

Scolium 1.

Non ita se res habet, quum exactis ludis m lucrum unius aleatoris à lucro superatur alterius. Profectò Theoria ludorum justorum explicata, facile est ad alios ludos transire, in quibus unus aleatorum quicquam habet prærogativæ præ altero: Revocatis formulis lucrorum, quæ in omnibus ludis m ad singulos aleatores pertinent, nempe $\frac{mBx}{x+y+q}$, & $\frac{mAy}{x+y+q}$, si differentia $\frac{mBx-mAy}{x+y+q}$ datæ magnitudinis est, facilè intelligitur prærogativam pro uno vel pro altero stare, pro ut habetur ea differentia positiva vel negativa. Dum agitur itaque de hujusmodi ludis, casus indifferentes non evanescunt, sicut in ludis æquis, in quibus ea differentia nulla est.

Si quantitas $\frac{mBx-mAy}{x+y+q}$ prærogativam exponit, quam alter præ altero habet in omnibus ludis m, eadem quantitas divisa per m, hoc est quantitas $\frac{Bx-Ay}{x+y+q}$ prærogativam exprimit, qua in singulis ludis aliquis aleatorum prævalet. Ut intelligatur, quid præstat hæc formula $\frac{Bx-Ay}{x+y+q}$, ea resolvenda est in sua elementa $\frac{Bx-Ay}{x+y}$, $\frac{x+y}{x+y+q}$: Horum primum significat, quod aleator prærogativa donatus, quotiescumque vincit, quantitatem $\frac{Bx-Ay}{x+y}$ acquirit plus æquo, & quotiescumque jacturam facit, eamdem quantitatem injustè retinet: Secundum elementum significat, quod probabilitas, ut ille

ille vincat, vel jacturam faciat (ut ludus scilicet decidatur) consistit in quantitate $\frac{x+y}{x+y+q}$. His elementis componentibus formulam $\frac{Bx-Ay}{x+y+q}$, facilè intelligitur, quod prærogativæ $\frac{Bx-Ay}{x+y}$, qua gaudet aleator in singulis casibus decisivis, aliquid ob casus indifferentes derogatur, ita ut in singulis ludis illa remaneat $\frac{Bx-Ay}{x+y+q}$

Scol. 2.

In quibusdam ludis prærogativa, quæ initio fuerat, aliquando potest ante decisionem mutari: In ludo, exempli gratia, Bassettæ lucratur œconomus totum depositum collusoris B, si accidit unus ex Casibus primariis *v*, & duas tertias partes ipsius depositi B si contingit unus ex casibus secundariis *u*: Collusor acquirit totum depositum œconomi A, si evenit unus ex aliis casibus primariis *y*, ac nihil aleatores adipiscuntur in eventu casus indifferentis *q*, ut aliàs indicavimus. Hinc prærogativa $\frac{Bv+\frac{2}{3}Bu-Ay}{v+u+y+q}$ initio ludi potest esse nulla, affirmativa, vel etiam negativa, pro ut ludus justus vel injustus est; At quælibet illa sit, si primo folio detecto ludus remanet adhuc indecisus, in aliam mutatur $\frac{Bv-Ay}{v+y+q}$. Quare si initio ludi prærogativa $\frac{Bv+\frac{2}{3}Bu-Ay}{v+u+y+q}$ (sicut æquitas postulat) nulla est, primo folio detecto resultat $Ay > Bv$, & in commodum collusoris transit alia prærogativa $\frac{Ay-Bv}{v+y+q}$.

Corol. 1.

Hinc oritur ratio, quam Collusor hac prærogativa donatus ad œconomi depositum habet. Quare si de ludo interrumpendo aleatores agunt, collusori debe-

tur ex deposito œconomi pars $\frac{Ay - Bv}{v + y + q}$; namque illa interruptio partem ludi peragendam impedit, pro qua nemo rationem habet quicquam acquirendi; non autem effectum tollit partis ludi jam peractæ, pro qua debita compensatio inter aleatores facienda est.

Si verò ludo instituto statim de illo deserendo agitur, nemo rationem habet supra depositum alterius; nam si conditio ludi interrumpendi eadem est, quæ initio fuerat, causa non est, cur aleatores, alter ab altero, quicquam adipiscantur.

Ita definitur ratio, quam in distributione aleator justè contra aleatorem habet; Quomodo autem ea ratio definienda sit, quam ponimus unum contra alterum injustè habere, aliis investigandam relinquo.

Corol. 2.

Interim addo, quod ludus inchoatus aliquando in alium mutatur, ut sæpe usu venit Aleatoribus Bassettæ. Uno vel pluribus foliis absque decisione detectis, aleatores inter se conveniunt, ut si Charta significativa est immediatè sub folio, quod primum apparet in prima biga, collusor aliquam partem ex deposito œconomi accipiat: Si verò ipsa Charta significativa locum diversum tenet, aleatores discedant, integrum suum depositum singuli retrahentes. Cum in hac conventione primus abrumpatur ludus, ut alius substituatur, initio primi ludi deposita æquitati consona sint, illud nimirum œconomi A, & illud collusoris B: In actu primi ludi interrumpendi Casus remaneant favorabiles œconomo v, favorabiles collusori y, & indifferentes q, quare cedat in commodum collusoris portio $\frac{Ay - Bv}{v + y + q}$ ex deposito œconomi capienda.

Hæc illa quantitas est, quam collusor in novo ludo amit-

admittere poteſt; at æquitas poſtulat, ut ſit $y : v :: \frac{Ay-Bv}{v+y+q} : \frac{Ayv-Bv^2}{vy+y^2+yq}$; Colluſor itaque, ſi vincat, in novo ludo acquirere debet ex depoſito œconomi partem $\frac{Ayv-Bvv}{vy+yy+yq}$. At ſi vincat, debetur illi altera quoque pars $\frac{Ay-Bv}{v+y+q}$, quæ primo ludo interrupto in ejus commodum ceſſerat; illi igitur Victori debetur ex depoſito œconomi pars $\frac{Ayv-Bvv}{yv+yy+yq} + \frac{Ay-Bv}{v+y+q}$, vel $\frac{\overline{v+y}\cdot\overline{Ay-Bv}}{yv+yy+yq}$.

Scol. 3.

Dum agitur de prærogativa unius vel alterius aleatoris, Caſus diverſi generis, primarii ſcilicet & ſecundarii, poſſunt alii pro deciſivis, & alii adinſtar indifferentium haberi. Ut res illuſtretur exemplo, ſummatur ludus Pharaonis eo modo quo in uſu eſt. Hoc cum omnibus foliis inſtituto numerantur (ut aliàs diximus) caſus primarii 130000, quorum eventu colluſor acquirit quantitatem A, totidem alii Caſus primarii, quibus evenientibus tantumdem acquirit œconomus. Si caſus hujuſmodi ſoli forent, prærogativa nemo aleatorum donaretur; at quia numerantur alii caſus ſecundarii 10725, quorum eventu œconomus acquirit quantitatem $\frac{1}{2}$ A, hujus itaque prærogativa fit in ſingulis ludis $\frac{A\cdot 130000 + \frac{1}{2}A\cdot 10725 - A\cdot 130000}{270725}$, vel $\frac{1}{2}A \cdot \frac{10725}{270725}$. Hæc quantitas in gemina reſolvitur elementa ſcilicet $\frac{1}{2}A \cdot \frac{1}{10725}, \frac{10725}{270725}$, quorum primum oſtendit, quod œconomus, quotieſcumque contingit unus ex caſibus ſecundariis, lucratur plus æquo quantitatem $\frac{1}{2}$ A, & ſecundum indicat, quod probabilitas, ut hoc

lucrifaciat (ut casus nempè secundarius contingat) consistit in quantitate $\frac{10725}{270725}$. Itaque haberi possunt casus secundarii tamquam decisivi, quibus oeconomus prærogativa donatur, & Casus primarii tamquam indifferentes, quibus prærogativa in incerto relinquitur: Nimirum ab his elementis composita quantitate $\frac{1}{2} A \cdot \frac{10725}{270725}$ (quæ est proximè æqualis $\frac{1}{50}$ A) hanc esse in singulis ludis oeconomi prærogativam agnoscimus.

Scol. 4.

Quum Casus decisivi diversi generis sunt, alii primarii & alii secundarii, ad alterutros referri potest prærogativa, qua gaudet Aleator. Summatur pro exemplo ludus Bassettæ: Hoc cum omnibus foliis inchoato, si usuvenit unus ex casibus primariis, quorum numerus (ut aliàs indicavimus) est 130000, collusor adipiscitur quantitatem A; Si contingit alter ex casibus primariis, quorum numerus est 119900, tantumdem acquirit Oeconomus. Si casus hujusmodi soli forent, prærogativa donaretur collusor; at quia numerantur alii casus secundarii 20825, quibus evenientibus aufert Oeconomus quantitatem $\frac{2}{5}$ A, hic itaque gaudet in singulis ludis prærogativa $\frac{A \cdot 119900 + \frac{2}{5} A \cdot 20825 - A \cdot 130000}{270725}$ vel quam proximè $\frac{3783}{270725}$ A. Hæc resolvi potest in duo elementa $\frac{3783}{20825}$ A, $\frac{20825}{270725}$. quorum primum nos docet, quod Oeconomus, quotiescumque contingit unus ex casibus secundariis, lucratur plus æquo quantitatem $\frac{3783}{20825}$ A, vel quam proximè $\frac{1}{5}$ A; & secundum ostendit, quod probabilitas ut unus contingat ex casibus secundariis, consistit in quantitate $\frac{20825}{270725}$. Verùm

præfa-

præfata prærogativa $\frac{3783}{270725}$ A reſolvi poteſt in duo alia elementa, videlicet $\frac{3783}{119900}$ A, $\frac{119900}{270725}$ quorum indicat primum, quod Oeconomus quotieſcumque unus accidit ex caſibus primariis, plus æquo adipiſcitur quantitatem $\frac{3783}{119900}$ A, vel quam proximè $\frac{3}{100}$ A; & ſecundum deſignat, quod probabilitas, ut unus accidat ex caſibus primariis, conſiſtit in quantitate $\frac{119900}{270725}$. At quomodocumque ſit, ex geminis elementis compoſita in utroque caſu quantitate $\frac{3783}{270725}$ A (quæ eſt proximè æqualis $\frac{1}{70}$ A) hanc eſſe conſtat in ſingulis ludis prærogativam Oeconomi.

Corol. I.

CUM LUCRETUR OECONOMUS IN SINGULIS LUDIS PARTEM $\frac{Bx-Ay}{x+y+q}$ ILLIUS NUMMI, QUI PRO DEPOSITO EST, NUMERO LUDORUM m COMPLETO LUCRABITUR PARTEM $\frac{mBx-mAy}{x+y+q}$ ILLORUM NUMMORUM, QUI IN OMNIBUS LUDIS m (SIVE CASUS PROPITII SINT, SIVE ADVERSI, SIVE INDIFFERENTES) NUMERANTUT. HIC NUMERUS LUDORUM m (PER EA QUÆ SUPRA TRADITA SUNT) EST NOTÆ INDETERMINATÆ, SED TAMEN EVENTUS INDUBITATI; ITAQUE NESGIT OECONOMUS AN ISTUM NUMERUM LUDORUM m CITO' VEL SERO' COMPLETURUS SIT; SED CERTUS EST TAMEN EUM NISI CITO' SALTEM SERO' COMPLENDI; ET CUM SEMEL ILLUM COMPLEVERIT, CERTUS EST ITERUM EUMDEM COMPLENDI, TOTIES QUOTIES &c. IGNORAT ITAQUE AN PARTEM $\frac{mBx-mAy}{x+y+q}$ ILLORUM NUMMORUM, QUI NUMERANTUR IN OMNIBUS LUDIS m, CITO' VEL SERO' LUCRATURUS SIT; AT TAMEN NON DUBITAT EAM PARTEM NISI CITO' SALTEM SERO' LUCRARI, ET CUM SEMEL ILLAM ACQUISIVERIT NON DUBITAT ITERUM EAMDEM (TOTIES QUOTIES) ACQUIRERE.

Corol. 2.

POTEST OECONOMUS PLUS LUCRARI, QUAM SUÆ PRÆROGATIVÆ CONVENIAT, SI AB EXERCITIO DISCEDIT, ANTEQUAM COMPLEAT PRIMUM NUMERUM LUDORUM *m*; POTERIT AUTEM IN HOC CASU JACTURAM QUOQUE SUBIRE. NUMERO LUDORUM *m* SEMEL COMPLETO, SI DISCEDIT ANTEQUAM ALTERUM COMPLEAT, LUCRUM POTERIT SPERARE MAJUS, ET JACTURAM TIMERE MINOREM; NAM A' LUCRO, QUOD IN PRIMO NUMERO LUDORUM *m* PROVENERIT, AUT ALTERUM LUCRUM AUGEBITUR, AUT JACTURA TEMPERABITUR. TANDEM POST UNUM ET ALTERUM NUMERUM LUDORUM *m* OECONOMUS POTERIT EO' PERVENIRE, UT QUAMVIS DISCEDAT, ANTEQUAM ALIUS NUMERUS COMPLEATUR, MAJUS SEMPER ATQUE MAJUS LUCRUM SPERANDUM SIT, PROCUL A' TIMORE JACTURÆ.

Corol. 3.

ITA LUCRUM RESPONDET OECONOMO, SI QUOD IN UNO LUDO DEPOSITUM EST, IDEM QUOQUE DEPONATUR IN ALTERO; AT SI DEPOSITA SUNT IN ALIIS LUDIS MAJORA, ET IN ALIIS MINORA, EXITUS LUCRI QUÆRENDUS NON EST IN OMNIBUS LUDIS CONJUNCTIM, SED IN ILLIS SINGILLATIM, QUI AD DEPOSITA EJUSDEM MAGNITUDINIS PERTINENT. ETENIM POTEST OECONOMUS SUA FRUI PRÆROGATIVA IN QUIBUSDAM LUDIS PERTINENTIBUS AD DEPOSITA UNIUS MAGNITUDINIS, ET NONDUM IN ALIIS; UNDE ORIATUR IN UNIVERSIS JACTURA. AT SI LUDI AD UNAMQUAMQUE DEPOSITI MAGNITUDINEM PERTINENTES AD EUM USQUE NUMERUM, QUI CONVENIT, AUGEANTUR; LUCRUM POTERIT IN UNIVERSIS QUOQUE ADIMPLERI.

Corol. 4.

SI QUIS IGITUR IN QUIBUSDAM LUDIS VELUTI IN ILLIS PHARAONIS VEL BASSETTÆ OECONOMUM VIDET DE COLLUSORE TRIUMPHARE, NON CREDAT HOC ESSE DONUM FORTUNÆ, QUÆ MAGIS UNUM QUAM ALTERUM DILIGAT; SED FATEATUR MUNUS ESSE LUDORUM, QUI MAGIS UNI QUAM ALTERI FAVENT.

Corol. 5.

HINC DICERE LICET, QUOD UNICUIQUE HOMINI NON INSIPIENTI OPUS EST LUDOS ALEÆ CALCULO EXACTIORE PERPENDERE, UT JUDICIUM FERRE POSSIT, ANTEQUAM DIUTIUS ILLIS INDULGEAT. NAM SI JUSTI SUNT, NEMO QUICQUAM SPERARE POTEST; SI INJUSTI, CERTUS EST UNUS LUCRI, ET ALTER DAMNI: VIDEAT IGITUR IN PRIMO CASU AN ITA TEMPUS TERENDUM SIT, ET IN ALIIS CONSIDERET, AN LUCRUM CONVENIAT HONESTATI, ET DAMNUM UTILITATI.

Corol. 6.

QUIDAM ALII SUNT LUDI SIMILES ILLI QUI VULGO DICITUR L'OMBRE: IN HIS ARS FORTUNÆ ADMISCETUR; NON SVFFICIT ENIM FAVORABILES CHARTAS SORTIRI, SED EAS QVOQVE INDVSTRIE' LVDERE OPORTET. HVJVSMODI LVDI VT PLVRIMVM JVSTI SVNT; NAM SI ALIQVA PRÆROGATIVA EST, EX VNO IN ALTERVM TRANSIT, VT DE EA ÆQVALITER OMNES PARTICIPENT. A PRINCIPIIS NOSTRIS NEC ISTI QVIDEM ABHORRENT, NAM FACILE' INTELLIGITVR ALEATORES, QVI DIV' PARI INDVSTRIA COLLVDVNT, NVLLA ALIA AFFICIENDOS ESSE JACTVRA PRÆTERQVAM TEMPORIS, QVOD DIV' LVDENDO CONSVMVNT, ET ILLOS, QVI ÆQVE' INDVSTRII NON SVNT, AFFICIENDOS ESSE LVCRO VEL DAMNO, PRO VT IN ARTE LVDENDI MAGIS VEL MINVS PERITI FVERINT.



LUDORUM SCIENTIA.

Pars Secunda.



CLarissimus Daniel Bernoullius ludorum Theoriam breviter expeditam videbit; verùm quantum satis est illustratam, ut is agnoscat, quod Montmortiano ac paterno nomine captus eam claudo pede percurrit. Mirabitur fortè nec verbum quidem de sortibus vel expectationibus Aleatorum legisse; At alia methodo consultò usus sum, quæ extra disceptationem foret, ut ejus ope faciliùs controversiam dirimerem.

Ut rem aggrediar, ea quæ leguntur in suis exercitationibus Mathematicis propono: *Sunt quatuor Casus, quorum duo favorabiles Petro, unus Paulo, & quartus neutri, quæritur ratio sortis Petri ad illam Pauli. Respondent Viri Doctiss. Rizzettus & Comes Riccatus esse sortes illas ut 2 : 1; ego verò cum Montmortio rationem 5 : 3 veram esse dico.* Comes Riccatus se ab hac

hac quæstione abstinebat; sed Bernoullius voluit eum quoque à sua demonstratione confundi. *Sit* (inquit) *Depositum quodlibet* A; *ergo duo sunt Casus Petro favorabiles qui ipsi valent* 2 A, *unus* (*nimirum contrarius*) *quo nihil*, & *unus* (*nempè indifferens*) *quo particulare suum depositum accipit; unde expectatio Petri per regulam notissimam est* $\frac{2.2A+1.0+1.A}{4} = \frac{5}{4}$ A, & *per consequens expectatio Pauli* $\frac{3}{4}$ A, *atque ratio expectationum ut* 5 : 3. *Quod erat demonstrandum*.

Hujusmodi expectationes Adversarius Montmortianis ac paternis vestigiis insistens ad illas refert totius depositi partes, quæ ab Aleatoribus capiendæ forent in casu ludi abrumpendi. Is autem jus, quod in distributione aleator justè contra aleatorem habet, cum illa ratione confundit, quam unum contra alium injustè sibi fingit habere. Ut itaque difficultatem intelligat, considerare debet, quod hujusmodi partes, & per consequens aleatorum expectationes (casu indifferente sublato) sunt inter se ut $\frac{4}{3} : \frac{2}{3}$. Si igitur (casu indifferente restituto) illæ mutantur in alias, quæ inter se habentur ut $\frac{4}{3} - \frac{1}{12} : \frac{2}{3} + \frac{1}{12}$, vel ut $\frac{5}{4} : \frac{3}{4}$, quomodo potest ita mutatio convenire definitioni Casus indifferentis, qui ab ipso dicitur neutri favorabilis?

Sed hæc me minus movent, pluris faciendum puto, quod in definiendis aleatorum expectationibus suam Adversarius demonstrationem ex mera Hypothesi arbitraria deducit. In hac enim supponit Aleatores expectare non modo illud, quod acquirere possunt ex alieno, sed etiam illud quod præservare possunt ex proprio.

At si ego postulo, ut id unicè aleatores expectent quod ex alieno possunt acquirere, quis est, qui prohibeat?

beat? Cum casus gemini sint, quibus singulis evenientibus aufert œconomus depositum collusoris A, Casus alter, in cujus eventu tantumdem collusor acquirit, & alius in quo nihil Aleatores lucrantur; si definio expectationem œconomi $\frac{2}{4}$ A, & illam collusoris $\frac{1}{4}$ A, & ob id dico esse illas ut 2 : 1, nec Adversarius prohibere potest. Etenim pro hujusmodi expectationibus definiendis hoc tantum postulo, ut nil aleatores expectent in illo Casu indifferente, in quo ipse Adversarius affirmat, *quod nec Oeconomus collusori, nec collusor Oeconomo aliquid solvendum habet.*

Ac si iterum postulo, ut aleatores expectent non modo illud, quod acquirere possunt ex alieno, sed illud quoque, quod amittere possunt ex proprio, quis est qui contradicat? Cum lucretur œconomus in geminis casibus depositum collusoris A, & in uno amittat suum depositum A; Collusor autem depositum œconomi acquirat in uno Casu, & suum perdat in geminis (nemine nec lucrum nec damnum in altero Casu sentiente), si definio expectationem œconomi $\frac{2}{4}$ A $-\frac{1}{4}$A $(+\frac{1}{4}$A$)$ & illam collusoris $\frac{1}{4}$ A $-\frac{2}{4}$ A $(-\frac{1}{4}$ A$)$, & per consequens dico esse illas ut +1:−1; nec Adversarius contradicere potest. Etenim ille commendat Bernoullium patruum, qui vult *vocabulum expectationis non sumi sensu vulgari, quo communiter expectare dicimur quod omnium optimum est, licet nobis pejus accidere possit; sed quatenus spes nostra impetrandi optimum temperata & imminuta est metu consequendi pejus, adeo ut per valorem expectationis semper significetur intermedii quidpiam inter optimum, quod speramus, & potissimum quod metuimus.*

Plu-

Pluribus aliis modis definire possem expectationes, quas aleatores habent, variè inter se combinando, quod isti acquirendum sperant, quod amittendum metuunt, & quod præservandum supponunt. At satis est Adversarium interrogare, quo munere suæ expectationes præferendæ sint meis, præsertim illis, quas ex primo Postulato deduxi?

Agatur in ludo proposito de invenienda prærogativa, qua gaudet unus aleatorum præ altero: Si expectationes Bernoullianas adhibeo; ex illa œconomi $\frac{5}{4}$ A detracto ejus deposito A, in residuo $\frac{5}{4} A - A = \frac{1}{4} A$ suam prærogativam invenio: si expectationibus utor meis, ex illa œconomi $\frac{2}{4}$ A dempta altera collusoris $\frac{1}{4}$ A, in ressiduo $\frac{2}{4} A - \frac{1}{4} A = \frac{1}{4} A$ eamdem pariter prærogativam inspicio.

Rursus agatur de eodem ludo ad æquitatem reducendo: Vocatis depositis, illo collusoris A, & illo œconomi x, erit hujus expectatio juxta regulam Bernoullii $\frac{2A + 2x + x}{4}$, & dempto deposito x erit ejus prærogativa $\frac{2A + 3x}{4} - x$. Cum hæc igitur debeat in ludo justo esse nulla, elicitur $x = 2$ A, quod est depositum ab œconomo pro ludi æquitate exhibendum. Si meis expectationibus utor, illam collusoris invenio $\frac{1}{4} x$, illam œconomi $\frac{2}{4}$ A, & hujus prærogativam $\frac{2}{4} A - \frac{1}{4} x$. Cum igitur æquitas postulet, ut hæc nulla sit, elicitur $x = 2$ A, hoc est illud quod prius elicitum fuit.

Donec in proposito ludo versamur, ignoro quo munere expectationes Bernoullianæ meis præferendæ sint; quamvis enim sit diversus utendi modus, vide-

 tur

tur tamen problematum ſolutionibus pariter utraſque inſervire. At ſi à præfato ludo diſcedimus, quo munere meæ præferendæ ſint Bernoullianis, manifeſtè patebit.

Etenim tria demonſtranda ſunt: Primum quod expectationes (ſeu ſortes) Bernoullianæ ea carent ſimplicitate, qua donantur meæ, quare uſu illarum operosè ac imperfectè peragitur, quod mearum ope faciliùs ac ſatiùs expeditur; Secundum quod in Problematum ſolutionibus ſortes Bernoullianæ ſæpe deficiunt, & morem meæ ſemper gerunt; Tertium quod opinionem de ludis ingerunt ſortes Bernoullianæ confuſam ac falſam, meæ diſtinctam ac veram.

Quod primo loco proponitur, ab exemplo Adverſarii demonſtratur; Sint quatuor Caſus, duo favorabiles Petro, unus Paulo, & alius indifferens; Evenientibus caſibus deciſivis aleatores acquirant, unus ab alio, depoſitum A, hac conditione ut à ludo non dimittantur, niſi Caſus indifferens determinatis aliquot vicibus n ſucceſſivè contingat.

Expectationes Bernoullianæ ita ab Adverſario inveniuntur; Sit M Sors Petri in caſu $n = 1$, N ejuſdem Sors in caſu $n = 2$, P in caſu $n = 3$, & ſic deinceps; & habebitur $M = \frac{5}{4}A$, $N = \frac{4A + M}{4}$, $P = \frac{4A + N}{4}$ &c., & ſubſtitutis valoribus pro M, N, P &c., habentur ſequentes æquationes $M = A + \frac{1}{4}A$, $N = A + \frac{1}{4}A + \frac{1}{16}A$, $P = A + \frac{1}{4}A + \frac{1}{16}A + \frac{1}{64}A$, unde patet eſſe ſortem Petri æqualem ſummæ ſequentis progreſſionis geometricæ $A + \frac{1}{4}A + \frac{1}{16}A + \frac{1}{64}A$ &c. eo uſque continuandæ, donec numerus terminorum excedit unitate datum numerum n, id quod dat ſortem Petri $\frac{4}{3}A \quad \frac{A}{3 \cdot 4^n}$

Expectationes ita inveniuntur meæ: Sint Caſus favora-

vorabiles Petro b, illi favorabiles Paulo c, indifferentes d, summa cunctorum a: Probabilitas quam Petrus habet pro acquirendo deposito, exprimitur per $\frac{b}{b+c}$, & quam habet Paulus, exponitur per $\frac{c}{b+c}$, & illa quam habet uterque pro ludo decidendo indicatur per $\frac{a^n - d^n}{a^n}$. Si fuerit igitur A quod in singulis casibus decisivis potest acquirere Petrus, & B quod potest acquirere Paulus, erit Sors Petri $\frac{Ab}{b+c} \cdot \frac{a^n - d^n}{a^n}$, & illa Pauli $\frac{BC}{b+c} \cdot \frac{a^n - d^n}{a^n}$. Cum itaque sint in ludo proposito $b = 2$, $c = 1$, $d = 1$, $a = 4$, & $A = B$; erit prima Sors $\frac{2}{3} A \cdot \frac{4^n - 1}{4^n}$, & secunda $\frac{1}{3} A \cdot \frac{4^n - 1}{4^n}$.

Pro invenienda Petri prærogativa, si sortibus Bernoullianis insistimus, ex illa Petri detrahimus depositum A, & residuum elicimus $\frac{1}{3} A \cdot \frac{4^n - 1}{4^n}$: Si Sortes meas adhibemus, ex illa Petri subducimus illam Pauli, & residuum colligimus $\frac{1}{3} A \cdot \frac{4^n - 1}{4^n}$, eamdem scilicet quantitatem utraque methodo invenimus.

At postulo ut mea methodus conferatur cum Bernoulliana, nam Adversarius operoso serierum Calculo in unico casu particulariter agit, quod ego faciliori opera generaliter in cunctis expedio. Si igitur una via operosè, & imperfectè peragitur, quod alia faciliùs & satiùs expeditur, confidenter affirmo illam esse minus idoneam, qua per plura fit in uno Casu, quod per pauciora fieri potest in omnibus.

Secundo loco demonstrandum proposui, quod in solutionibus Problematum Sortes Bernoullianæ sæpè deficiunt, & morem meæ semper gerunt. Ut igitur proposito satisfaciam, ab exemplo Adversarii rursus

incipio: Petrus & Paulus colludunt pro deposito 2 A, cujus dimidia pars est unius, altera alterius: Duos habet ille Casus favorabiles, hic unum: Casus insuper alius est, quo successivè eveniente Petrus successivè reponit A, 2 A, 4 A &c.; & si determinatis aliquot vicibus n is Casus successivè contingit, integrum depositum Aleatores æqualiter inter se dividunt: Quæritur ratio Sortum illarum quæ ab Adversario indicantur.

In hujus problematis solutione hic invenit priùs, quod existente $n = \infty$ Sors Petri est ad illam Pauli ut 7 : 5, deinde subjungit ulteriùs extendi posse speculationes, quærendo nimirum quænam series alia substituenda sit progressioni geometricæ 1, 2, 4 &c., ut Petrus & Paulus æquali Sorte colludant.

In hoc solvendo Problemate, si loco progressionis 1, 2, 4 &c. substituitur altera x^0, x^1, x &c., Sortes Bernoullianæ in casu $n = \infty$ inveniuntur, nempè *illa* Petri $\frac{4A}{3} - \frac{A}{12 - 3x}$, & illa Pauli $\frac{2A}{3} + \frac{A}{12 - 3x}$. Ut igitur Petrus & Paulus æquali sorte colludant, *videntur* Sortes debere inter se æquales esse; quare facta æquatione $\frac{4A}{3} - \frac{A}{12 - 3x} = \frac{2A}{3} + \frac{A}{12 - 3x}$, elicitur $x = 3$ A, quod verum profectò est.

Quod si pono quatuor esse Casus a, b, c, d ita ut Petrus acquirat quantitatem A, si accidit Casus a, & quantitatem 2 A, si evenit casus b; Paulus autem lucretur quantitatem x si contingit casus c, & à ludo aleatores discedant in eventu Casus indifferentis d: Sortes Bernoullianas invenio, illam Petri $\frac{3A + 3x}{4}$, & illam Pauli $\frac{5A + x}{4}$. Quærendo igitur, quæ sit quantitas x ut Petrus & Paulus æquali Sorte colludant, si facio ut ante Sortes inter se æquales, elicio $x =$ A; Quod utique falsum est, exactis enim omnibus ludis m, Pe-

trus

trus acquirit $\frac{3mA}{4}$, & Paulus $\frac{mA}{4}$; primus nimirum plus acquirit quam ſecundus; quod problematis conditioni repugnat.

Hinc igitur patet quod Bernoullianis ſortibus inſiſtendo juxta methodum ab Adverſario indicatam, nunc veritatem aſſequimur, & nunc in errorem incidimus. At huic exceptioni reſponderi poteſt quod Petrus, & Paulus tum ſorte æquali colludunt, quum nemo prærogativa donatur. Sicut igitur Petri prærogativa ab Adverſario ſtatuitur in differentia, quæ inter ejus ſortem, & ejus depoſitum intercedit, hoc eſt in quantitate $\frac{3A+3x}{4} - x$, hac itaque poſita $= 0$, invenitur $x = 3$ A; quod utique veritati conſentit.

Si ſortes Bernoullianæ ſemper ita ſe haberent, impropriæ quidem, non autem inutiles forent; Sed ſciendum eſt, quod non ita ſemper illæ reſpondent. Ecce exemplum: Sint gèmini Caſus a, b, primus favorabilis Petro, ſecundus Paulo, & ita ludus inſtituatur: Primò experimenta abſolvantur bina ac bina, & uno abſoluto binario teneantur Aleatores alterum, atque alterum inſtaurare, donec caſus a, vel b in binis experimentis contingat: Secundò vincat is, cujus caſus ſucceſſivè bis accidit, & hac de cauſa lucretur Petrus depoſitum Pauli 2 A, & Paulus depoſitum Petri A: Tertiò ſi primo duorum experimentorum accidit Caſus a, reponatur à Petro quantitas x, ut hæc ab ipſo recuperetur, ſi ſecundo experimento contingit idem Caſus a, vel acquiratur à Paulo, ſi evenit Caſus b: Quartò ſi tandem primò duorum experimentorum accidit Caſus b, reponatur à Paulo quantitas 2 A, ut hæc ad eum redeat, ſi ſecundo experimento recurrit idem Caſus b, vel tranſeat ad Petrum, ſi accidit Caſus a.

Obſer-

Observo in hoc ludo quatuor eventus esse possibiles, nam gemini Casus *a*, *b* combinari possunt bini, ac bini quatuor hisce modis *a a*, *a b*, *b a*, *b b*. Rursus animadverto, quod si contingit unus ex duobus eventibus *a a*, *b b*, aleator qui vincit, non solùm præservat suum, sed quoque depositum acquirit alterius; quare juxa regulam Bernoullianam expectat quantitatem 3 A. Verum si accidit unus ex duobus *a b*, *b a*, aleatores nequeunt ea deposita præservare, quæ jacere debent, donec accidat unus ex aliis *a a*, *b b*; Quare Petrus nil aliud expectat, quam ut amittat in eventu *a b* quantitatem x, & acquirat in eventu *b a* quantitatem 2 A; nec aliud Paulus expectare potest, quam ut lucretur in eventu *a b* quantitatem x, & amittat in eventu *b a* quantitatem 2 A. Unde sortes Bernoullianæ prosiliunt, illa Petri $\frac{5A-x}{4}$, & illa Pauli $\frac{A+x}{4}$.

Cum igitur inveniendus sit valor x, ut Petrus, & Paulus æquali sorte colludant, si nullam pono prærogativam Petri, hoc est $\frac{5A-x}{4} - A = 0$, invenio $x = A$; Quod falsum est, nam exactis omnibus ludis m Petrus acquirit m A, & Paulus $\frac{mA}{2}$, plus nimirum unus quam alius, quod conditioni Problematis adversatur. Nec geminas inter se sortes æquando invenitur valor x; si enim fit $\frac{5A-x}{4} = \frac{A+x}{4}$, elicitur $x = 2$ A; Quod pariter falsum est, nam absolutis omnibus ludis m, Petrus lucratur m A, & Paulus $\frac{3mA}{4}$, plus nimirum ille quam iste, quod pariter problematis conditioni repugnat.

Ut igitur Petrus, & Paulus æquali sorte colludant, verum est quod valorem x in pluribus ludis invenimus, in quibusdam modo proprio sortes Bernoullia-

nas

nas tractando, eas scilicet inter se æquando, & in aliis modo nisi proprio saltem improprio illas usurpando, nullam nempè faciendo differentiam, quæ inter sortem unius aleatoris, & ejus depositum intercedit. At verum est quoque, quod hujusmodi valorem x in pluribus aliis ludis, has sortes adhibendo, ullo modo invenire non possumus.

Non ita se habent sortes meæ, quæ Problematum solutionibus eodem modo semper inserviunt: In ludo, qui primus ex tribus superiùs propositis legitur, illa Petri invenitur $\frac{2A}{3}$, illa Pauli $\frac{A}{3}+\frac{A}{12-3x}$, & ex æquatione $\frac{2A}{3}=\frac{A}{3}+\frac{A}{12-3x}$ elicitur $x=3$ A, ut superiùs elicitum fuit. In secundo ludo illa Petri est $\frac{3A}{4}$, illa Pauli $\frac{x}{4}$, & ex æquatione $\frac{3A}{4}=\frac{x}{4}$ colligitur $x=3$ A, ut priùs colligere licuit. In tertio ludo resultat illa Petri A, & illa Pauli $\frac{A+x}{4}$, & ex æquatione A $=\frac{A+x}{4}$ prosilit $x=3$ A, quod veritati consentit. Quare sortes Bernoullianas in solutionibus Problematum sæpe deficere, & morem meas semper gerere satis hæc exempla demonstrant.

Tertio loco ostendendum proposui, quod opinionem de ludis ingerunt sortes Bernoullianæ confusam, ac falsam, meæ distinctam, ac veram. Satis autem ad intentum facere sequens videtur exemplum: Gemini instituantur ludi, in quibus singulis quatuor sint Casus, qui contingere possint: In primo duo favorabiles Petro, unus Paulo, & quartus indifferens; in secundo unus favorabilis Petro, nullus Paulo, & tres indifferentes. Cum Aleatores in casibus decisivis valorem A alter ab altero acquirant; Sortes Bernoullianæ tam in uno, quam in alio eliciuntur, nempè illa

Petri

Petri $\frac{5A}{4}$, & illa Pauli $\frac{3A}{4}$, & proindè in utroque ludo prima ad ſecundam ut 5 : 3. Has igitur ſortes reſpiciendo quis poterit ludos propoſitos unum ab alio diſtinguere ? & quid in ſingulis acquiſituri ſint aleatores unus ab alio cognoſcere ?

Non ita operantur meæ : In primo ludo eſt illa Petri $\frac{2A}{4}$, illa Pauli $\frac{A}{4}$; hoc eſt inter ſe ut 2 : 1. In ſecundo illa Petri $\frac{A}{4}$, illa Pauli $\frac{0}{4}$, & ob id inter ſe ut 1 : 0. His igitur inſiſtenſto intelligimus, quod aleatores unus ab alio acquirere poſſunt, ſcilicet in primo ludo Petrus duplum, Paulus ſimplum, & in ſecundo Petrus aliquid, Paulus nihil. Quare à ſortibus Bernoullianis opinionem ingeri confuſam, ac falſam, à meis diſtinctam, ac veram ſatis hoc unico exemplo demonſtratur.

Ut igitur veram, ac diſtinctam de ludis ideam conſequamur, mittendæ ſunt omnes Hypotheſes arbitrariæ, & ea tantum elementa ſummenda ſunt, quæ neceſſaria, & immutabilia ludos ipſos componunt.

Si ludus aliquis proponatur, in quo certa, ac determinata ſit ratio depoſitorum, quæ vincendo aleatores alter ab altero acquirunt, hoc utique arbitrarium non eſt, cum dependeat ex ludi propoſiti conditione. His depoſitis quantitates deſigno, quas Aleatores expectant; nec facit ad rem, quod illorum ratio mutari poſſit; nam ſi hujuſmodi mutatio fit, ludus ampliùs non eſt, qui fuit ab initio propoſitus.

Quod iterum Caſus utrique Aleatori propitii numero recto, ac determinato comprehendantur, & rationem determinatam inter ſe ſervent, neque hoc arbitrarium eſt, cum dependeat ex propoſiti ludi natura, His Caſibus vel ex toto, vel ex parte deciſivis (nam

quo-

quomodo secundi ad primos revocentur, supra expli-catum est) probabilitates Aleatorum dimetior. Nec quicquam officiunt Casus indifferentes; nam si Petro duo Casus favent, & unus Paulo, sive nulli sint Ca-sus indifferentes, sive horum numerus in infinitum augeatur, semper duplò probabilius est pro primo quam pro secundo stare Victoriam.

Quod tandem Casus decisivi ad omnes, si indiffe-rentes adsunt, datam habeant proportionem, pro ut ludi natura postulat; nec hoc pariter est arbitrarium. Cum igitur Casus indifferentes, quotiescumque contingunt, Aleatorum spem irritam reddant, hinc oritur alia probabilitas utriusque Aleatoris respectu lu-di. Tertium enim Aleatorem hac lege mihi fingo con-tra ludum certare, ut hic in eventu casuum indiffe-rentium dimittatur.

Hoc mirum in modum illustrat illa Bernoullii Pa-trui definitio, *quod unusquisque tantumdem expectat, vel expectare dicendus est, quod infallibiliter obtine-bit*. Porrò ludus instituatur, in quo sit depositum Petri A, Pauli B, Casus decisivi pro proximo x, pro secundo y, indifferentes q: Cum in omnibus ludis m infallibiliter consecuturi sint, ac proinde expectare debeant Aleatores scilicet Petrus $\frac{mBx}{x+y+q}$, & Paulus $\frac{mAy}{x+y+q}$, in singulis ludis expectabunt primus $\frac{Bx}{x+y+q}$, secundus $\frac{Ay}{x+y+q}$.

Si igitur hujusmodi expectationes ita scribamus B . $\frac{x}{x+y}$. $\frac{x+y}{x+y+q}$, A . $\frac{y}{x+y}$. $\frac{x+y}{x+y+q}$, se dant illi-cò in conspectum tria supra explicata elementa, Sym-bolis B, A, quantitates designantibus, quas Aleatores expectant, formulis $\frac{x}{x+y}$, $\frac{y}{x+y}$ probabilitates expri-

mentibus quas
lore $\frac{x+y}{x+y+q}$, pro
ſortiatur effectu
ceſſaria, & im
ritè tractata vi
nem ingerunt

Quoniam au
ex proprio, ve
ri ſolvendum n
& præfatis elem
de ludis opinio
patet; nam fo
expectationum
ad ludos pertin
ctationibus aut
Aleatores ex
$\frac{xx+Ax+Aq}{x+y+q}$, A
fundunt.

Cum itaque
$x=2$, & $y=$
m major vel mi
per conſequens
pro ut minor ve
ferentium *q*; A
rabiles Petro,
nient favorabile
quod infallibilit
quod conſequen
aliàs affirmavi,
tioni inſiſtendo
expectationes in


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06389 6321

Casi sortiti sono in quella istessa proporzione, nella quale erano i Casi da sortirsi; egl'è manifesto che i Denari conseguiti da Pietro, à quelli conseguiti da Paolo saranno come $\frac{n}{2} + \frac{n}{8}, \frac{n}{4} + \frac{n}{8}$. *In questa Ipotesi mi pare non potersi dire che il quarto Caso sia neutro; giacche può essere favorevole più all'uno che all'altro con diversa proporzione à norma della diversa quantità, che ogn'uno avrà contribuito per formar il deposito n.*

Nec tamen profuit tam clarum doctrinæ exolendæ indicium dedisse, nimis enim captus approbatione, quam Bernoullius Pater Montmortianos Calculos comendaverat, longè fuit ab imis sententiæ meæ recessibus penetrandis; Quoad effectum Casus indifferentis existimavit de puro nomine quæstionem esse, quapropter ita rescripsit: *Admiror dexteritatem, qua Vir Doctiss. Joh. Rizzettus disputationem Mathematicam in disputationem Grammaticam convertere novit*. Nunc autem mea Sententia meliùs considerata quæstionem intelliget esse de methodo non de homine, & hoc priùs quoque intelligere potuisset, si Patruum suum is ipse satis attentè perlegisset.

Suas interim exercitationes super hanc rem in dies magis, ac magis excolebat, ut eas tandem in lucem ederet. Ne videretur autem in me ulla libidine projici, suum incipit librum dicendo, quod eum impulsi invitum, ut, illas edendo, faceret id, à quo fuit semper multum alienus. Verum hunc animum suum invitum lippis obtrudere potest. Etenim si illum ut id faceret sollicitavi, aut recusare poterat vel non: Si poterat, quomodo obtemperavit invitus? & si non poterat, cur causam dedit, ut recusare non posset?

Ei

Ei tantummodo displicebat rem difficiliorem non esse; Ait igitur, *pudet me propemodum in lucem prodire cum contentione, quæ mihi est cum Viro Doctiss. Joh: Rizzetto, de re perfacili, nihil quæstionis in se habente, ac demonstratione Geometrica munita*. At is videtur ignarus illius materiæ, quam tractandam susceperat; nam eam perfacilem vocat, & nihil quæstionis in se habentem, licet illa à principio probabilitatum dependeat, quod Bernoullius Patruus postquam per vicennium pressit, non ita tamen demonstratum dedit, ut nihil ampliùs desideraretur. At magis adhuc eamdem materiam videtur ignorasse, dum Geometrica demonstratione munitam appellat suam de expectationibus Aleatorum Sententiam, quæ merè Hypothesi insistit.

Dum ejus liber proditurus erat, aliquid utique nisi optimi saltem boni expectabam; At sanè fateor me obstupuisse, cum vidissem illum hoc tantùm rei controversæ addidisse; *Quod firmissimè asseverare non dubitat ipsum Rizzettum neutiquam intelligere (Montmortium scribentem, & Bernoullium Patrem approbantem) quos passim erroris postulat*. Me interim excitatum sensi, ut nomen meum unà cum veritate defenderem, ne diutiùs ille de utroque triumphasse juvenili audacia gloriaretur. In medium igitur, & ego meas cogitationes fero, ut aliorum judicium sit, quis nostrum Montmortii librum, & Bernoullii Patris epistolam attentiùs legendo perpenderit, & interius intelligendo penetraverit.

Appendix ad Calcem esset, si à dicteriis Adversarius se abstinuisset. Is in mea Scheda legit: *Per quello riguarda il Problema dal detto Signor Bernoulli*

noulli proposto, ne avrei ancor io de curiosi, e trà gli altri quello di calcolar le Sorti de Giocatori nel gioco di Faraone, poste le Carte significative tutte quelle d'un colore: Et his verbis, quibus hujusmodi Problema solvendum subindico Adversarius adnotationem facit. *Notandum autem curiosum à Rizzetto vocari Problema quod jam Montmortius, & alii solutum dederunt, & ita solutum, ut Problema Rizzettianum non nisi peculiaris sit Casus*. At huic adnotationi ejusmet Adversarii solutionem objicio. Si ab hujus Problematis subindicatione me abstinere debebam, quia ab aliis solutum fuerat; cur Adversario opus erat illud iterum solvere?

Hujus suæ Solutionis causam reddit: *Tabulam* (inquit) *construxi ad modum Montmortii, quæ mereetur ut conferatur cum Montmortiana, quò utriusque discrepantia, nostræque simplicitas patescat. Conformes ambæ inter se deprehendentur in numeris minoribus, at non item in majoribus. Differentia hæc ex eo venit, quod Montmortius in longissimis suis Calculis, non potuerit non interdum errorem Calculi committere*. Ex una parte solutionem præfati Problematis tradit, quia solutio ab aliis tradita erroris vitio laborat, & ex altera parte me irridet, quia Problema solvendum exhibui, quod alii solutum dederunt. Verè ille irridendus, qui solet alios tali pacto irridere.

Verum lepidior est ejus exprobatio, qua me urget, quia erroris argui Montmortium qui Pharaonis ludum ad computum reduxit, & ejus Patrem, qui Montmortii Calculum approbavit. *Judicandum itaque* (is ait) *relinquo ipsi Doctiss. Viro Rizzetto,*

zetto, *pariter ac Clarifs. Co: Riccato* (*quem ejusdem cum priore ſententiæ eſſe intellexi*,) *an non in Viros ſupranominatos quodammodo injuſti fuerint, eos tam turpiter erraſſe ſuſpicando, quin erroris palam accuſando*. At quis eſt qui fatetur, quod Montmortius in longiſſimis ſuis Calculis ludi Pharaonis non potuerit non interdum errorem Calculi committere? Hic Adverſarius eſt, qui Montmortii quem Riccatus, & Rizzettus non ſatis attentè perlegiſſe videntur, ita Scholiaſten agit. Dum autem Montmortianos lapſus Scholiaſten agendo fatetur, & corrigit, ſi cenſet eos tribuendos illuſtris Galli inadvertentiæ in computis tam operoſis, eos excuſare non poteſt, quin methodi defectum, unde illi orti ſunt, mecum ipſe condemnet.

Contra Adverſarii expoſtulationes dictum ſatis eſſet, niſi quereretur ipſe quoque de modo, quo Bernoullium Patrem ac ipſum improbavi. *Etenim intelligens* (de me ſub initio ſui libri ita loquitur) *Virum Doctiſs: poſt meas Parentis vindicias non ſolum injuriis ſuis paterni nominis obtrectationibus inſiſtere, ſed de ipſis Scriptis meis Apologeticis tamquam paralogiſmis, & erroribus ubique plenis judicium ferre ignominioſum &c.* Hæc ſe intellexiſſe, non legiſſe fatetur; ſuis igitur querelis publicos teſtes objicio: Sat eſt mea publica Scripta cum ſuis, patriiſque comparare, ut quiſque judicium ferat, num, de aliis contumelioſè, loquendo, Bernoullianos mores imiter.

De hoc alibi ſermo redibit; interim pro concluſione ſubjungo, quod *ille intelligens me judicium ferre de ſuis ſcriptis apologeticis ignominioſum, non potuit non ſuas Chartas publicas facere, ut nomen*

ſuum

ſuum ab hujuſmodi inſultationibus vindicaret, ſimulque altercationi finem imponeret. Dum autem putat finem ponere altercationi ſupponendo non demonſtrando, quæ ſint Aleatorum expectationes; imò dum putat demonſtrationem eſſe, quæ mera Hypotheſis eſt, caveat ne accuſationem defenſione confirmet, & ſuo ipſemet nomini inſultet.

FINIS.